

# RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE TRANSPORTE COM DIAGRAMAS DE VORONOI

**Antonio Galvão Novaes**

Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas  
Universidade Federal de Santa Catarina

## RESUMO

Problemas de localização de facilidades numa região são freqüentes na literatura. Nos problemas de zoneamento, por outro lado, o objetivo é dividir o território em sub-regiões menores, denominadas distritos ou zonas, de forma a otimizar uma determinada função objetivo e garantindo certas condições de balanceamento da demanda, de contigüidade, e soluções compactas. Embora diversos problemas de localização e de zoneamento têm sido tratados de forma discreta, agrupando áreas elementares em distritos com o auxílio de um modelo matemático, o atual estágio da computação tem permitido a utilização de modelos contínuos, com aproximações baseadas na distribuição da demanda sobre a região e não nas informações específicas de cada unidade a ser atendida. Diagramas de Voronoi podem ser utilizados com sucesso na resolução de problemas de localização e zoneamento desse tipo. São apresentados, neste artigo, os principais contornos teóricos e práticos do assunto, seguidos de uma aplicação a um problema de transporte.

## ABSTRACT

Facility location problems over a region are frequent in the literature. In districting problems, on the other hand, the aim is to partition a territory into smaller units, called districts or zones, while an objective function is optimized and some constraints are satisfied, such as balance, contiguity, and compactness. Although many location and districting problems have been treated by assuming the region previously partitioned into a large number of elemental areas and further aggregating these units into districts with a mathematical programming model, continuous approximation, on the other hand, is based on the spatial density of demand, rather than on precise information on every elementary unit. Voronoi diagrams can be successfully used in association with continuous approximation models to solve location-districting problems, specially transportation and logistics applications. We discuss in the paper the main theoretical and practical elements associated to this subject, followed by an application to a transportation problem.

## 1. INTRODUÇÃO

A grande maioria de problemas de transporte e de logística envolve relações espaciais, sejam elas de divisão de território (definição de zonas de tráfego, por exemplo), localização de facilidades (estações de metrô, depósitos, centros de distribuição de mercadorias, pontos de transbordo, etc.), redes de transporte, etc. Muitos problemas apresentam formulação discreta, mas com os avanços da computação, modelos contínuos têm sido utilizados de forma crescente ( Langevin *et al.*, 1996; Novaes *et al.*, 2000; Dasci e Verter, 2001; da Silva, 2004; Galvão *et al.*, 2006, Novaes *et al.*, 2007 ), principalmente nas fases de planejamento de novos sistemas de transporte e de logística. Neste trabalho vamos abordar, dentro da formulação contínua, dois tipos de problemas bastante comuns na análise de sistemas de transportes e de logística, e apresentados de forma integrada: problemas de localização de facilidades e problemas de zoneamento (*districting*).

Problemas de localização de facilidades (Drezner, 1995; Drezner e Hamacher, 2002) buscam determinar os locais ótimos para sediar instalações diversas de forma a otimizar uma função objetivo, como, por exemplo, minimizar o custo de transporte, maximizar a demanda atraída pelo serviço, além de outras. Esse tipo de problema tem frequentemente natureza geométrica e combinatória. A literatura técnica apresenta um grande número de aplicações: localização de estações de metrô, de hospitais, escolas, depósitos, centros de distribuição, etc.

O objetivo dos problemas de zoneamento, por outro lado, é obter a partição otimizada de um território em unidades menores, chamadas de distritos, bolsões, ou zonas, obedecendo algumas restrições. Uma parte dessas restrições reflete basicamente critérios de bom senso. Uma delas procura equilibrar a demanda entre os distritos. Além disso, os distritos ou zonas devem ser contíguos e geograficamente compactos (Williams, 1995; Mehotra *et al.*, 1998). Outras restrições refletindo a natureza específica do problema são normalmente adicionadas ao modelo. Problemas de zoneamento são freqüentes em diversas aplicações práticas. Por exemplo, zoneamento escolar (Schoepfle *et al.*, 1991), definição de distritos policiais (D'Amico *et al.*, 2002), divisão de território para vendedores (Zoltners e Sinha, 1983), são exemplos típicos. No caso específico de transporte e logística são encontradas também diversas aplicações na literatura técnica: definição de distritos para aplicação de sal em redes urbanas (Muyldermans *et al.*, 2002), distribuição espacial de clientes de centros de distribuição (Zhou *et al.*, 2002), definição de zonas de entrega para veículos de distribuição de produtos (Dasci e Verter, 2001; Novaes *et al.*, 2000; Galvão *et al.*, 2006, Novaes *et al.*, 2007), etc.

Uma forma de resolver problemas de zoneamento é partir de uma divisão prévia do território em pequenas áreas e agrupá-las para gerar um certo número de distritos, de forma a otimizar uma função objetivo, obedecendo algumas restrições (William, 1995; Mehrotra *et al.*, 1998). Já nos problemas com formulação contínua, o espaço subjacente é representado por variáveis contínuas e a análise é baseada na distribuição aproximada da demanda sobre a região e não nas informações específicas de cada unidade a ser atendida (Langevin *et al.*, 1996; Galvão *et al.*, 2006).

A associação de técnicas de aproximação contínua com diagramas de Voronoi permite resolver uma série de problemas da vida real. Especificamente, aplicações de diagramas de Voronoi não ordinários têm sido apresentados na literatura (Suzuki e Okabe, 1995; Boots *et al.*, 1997; Okabe *et al.*, 2000; Galvão *et al.*, 2006, Novaes *et al.*, 2007). Boots *et al.* (1997) utilizaram diagrama de Voronoi com pesos multiplicativos para definir áreas de competição no comércio varejista. Galvão *et al.* (2006) desenvolveram modelo matemático incorporando diagrama de Voronoi com pesos multiplicativos para resolver um problema de distribuição urbana de carga parcelada. Esse mesmo problema foi resolvido considerando a existência de barreiras no processo de criação dos distritos (da Silva, 2004).

O objetivo deste artigo é descrever e analisar modelos de localização e/ou zoneamento aplicados à solução de problemas de transporte, combinando diagramas de Voronoi com algoritmos de otimização. Na Seção 2 é apresentado um resumo dos conceitos básicos e propriedades sobre diagramas de Voronoi de interesse para a solução de problemas de transportes e logística. A Seção 3 aborda aspectos computacionais ligados à construção prática de diagramas de Voronoi. Na Seção 4, por sua vez, é apresentada em detalhe uma aplicação na área de transporte urbano. Finalmente, na Seção 5, são apresentadas as conclusões.

## 2. DIAGRAMAS DE VORONOI

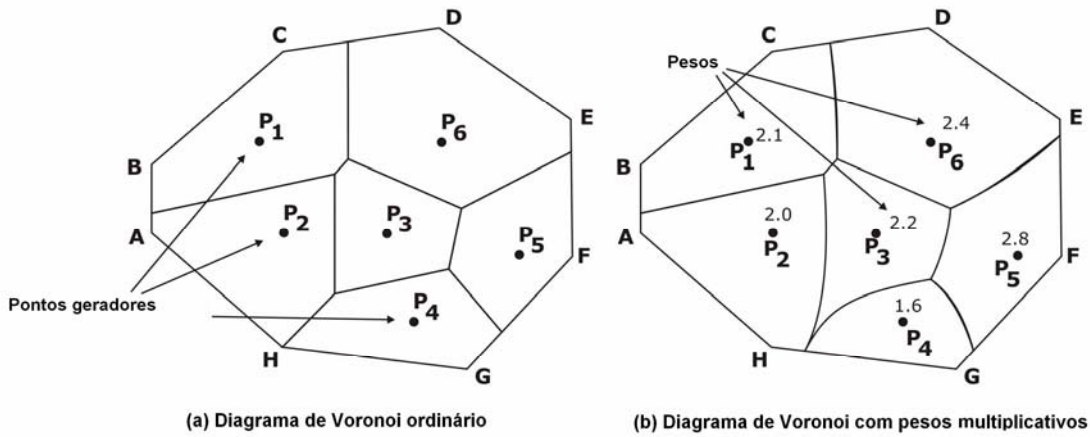
Diagramas de Voronoi, de interesse para nosso estudo, são definidos no plano ( $R^2$ ), embora também sejam analisados noutras dimensões. O conceito básico de diagrama de Voronoi é bastante simples (Aurenhammer, 1991; Okabe *et al.*, 2000): dado um conjunto de pontos distintos  $P \equiv \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  num espaço contínuo, procura-se associar todos os demais pontos

desse espaço com o membro mais próximo do conjunto  $P$  (aqui a distância está ligada a uma métrica específica, cujas várias formulações serão sumarizadas adiante). O conjunto fechado de  $m$  pontos constitui o *conjunto gerador* do diagrama de Voronoi, representado por  $P \equiv \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ , com  $m \geq 2$ .

Sendo  $\mu(X, Y)$  a variável que exprime a distância entre dois pontos numa métrica apropriada, e sendo  $X, Y \in R^2$  pontos do plano, o diagrama de Voronoi é definido matematicamente por

$$V(P_i) = \{X \in R^2 \mid \mu(X, P_i) \leq \mu(X, P_j), \quad j = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

O exemplo clássico é o diagrama de Voronoi ordinário, em que a distância entre dois pontos é a Euclidiana, com  $\mu(X, Y) = \|X - Y\|$ , com as sub-regiões resultantes formadas por polígonos convexos (Figura 1a).



**Figure 1** - Diagrama de Voronoi ordinário e com pesos multiplicativos

Há situações em que a distância Euclidiana não representa bem o processo de atração dos pontos geradores. Por exemplo, suponhamos que os seis pontos geradores mostrados na Figura 1b sejam lojas de varejo vendendo um mesmo tipo de produto. Suponhamos adicionalmente que, além da distância, a atração das lojas depende de uma série de atributos refletidos nos pesos mostrados na Figura 1b. Para representar adequadamente esse tipo de inter-relação, diversos tipos de diagrama de Voronoi foram desenvolvidos. Um deles é o diagrama de Voronoi *com pesos multiplicativos* (Voronoi-PM), representado pela seguinte métrica (Okabe *et al.*, 2000)

$$\mu(X, P_i) = \frac{1}{w_i} \|X - P_i\|, \quad (2)$$

onde  $w_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) representa um conjunto de pesos estritamente positivos. Para o caso de dois pontos geradores, o lugar comum dos pontos do plano que satisfazem (2) é o círculo de Apolônio (Okabe *et al.*, 2000), exceto quando  $w_1 = w_2$ , quando o bissetor se torna uma reta. A Figura 1b mostra um exemplo de diagrama de Voronoi-PM, para os pesos mostrados no gráfico. De uma forma geral, a região resultante não é necessariamente convexa ou conectada, podendo inclusive apresentar espaços vazios (Okabe *et al.*, 2000). Por essa razão, cuidado

especial deve ser tomado ao se desenvolver modelos iterativos computacionais envolvendo Voronoi-PM. Caso contrário, o processo computacional pode não convergir ou pode gerar soluções não realistas (Galvão *et al.*, 2006).

De forma análoga, o diagrama de Voronoi *com pesos aditivos* (Voronoi-PA) é representado por (Okabe *et al.*, 2000)

$$\mu(X, P_i) = \|X - P_i\| - w_i. \quad (3)$$

Aqui, o sinal de  $w_i$  não é restritivo, podendo ser positivo ou negativo dependendo do problema. Considerando dois pontos geradores  $P_i$  e  $P_j$ , o bissetor associado ao diagrama de Voronoi-PA é um segmento de uma curva hiperbólica com focos em  $P_i$  e  $P_j$ , ou um segmento de reta em casos particulares (Okabe *et al.*, 2000). Há também o *diagrama de Voronoi com pesos combinados* (Voronoi-PC), representado por

$$\mu(X, P_i) = \frac{1}{w_{i1}} \|X - P_i\| - w_{i2}, \quad (4)$$

Onde o sinal de  $w_{i2}$  também não é restrito a valores positivos. Para este tipo de diagrama de Voronoi, os limites das sub-divisões são representados por uma função polinomial de grau quatro, com forma geométrica bastante complexa (Okabe *et al.*, 2000). Finalmente, o diagrama de Voronoi *de potência* (Voronoi-PT) é definido da seguinte forma

$$\mu(X, P_i) = \|X - P_i\|^2 - w_i \quad (5)$$

Para este caso os limites das sub-regiões geradas pelos pontos geradores  $P_i$  e  $P_j$  é um segmento de reta perpendicular ao segmento ligando os pontos  $P_i$  e  $P_j$ , e passando pelo ponto  $X_{ij}^*$  dado por (Okabe *et al.*, 2000)

$$X_{ij}^* = \frac{\|P_j\|^2 - \|P_i\|^2 + w_i - w_j}{2\|P_j - P_i\|^2} (P_j - P_i), \quad (6)$$

Uma propriedade importante do diagrama de Voronoi-PT, bastante útil nas aplicações, é que as sub-regiões são polígonos convexos. Esse tipo de diagrama de Voronoi é especialmente indicado para solução de problemas com barreiras impostas por vias expressas, rios, lagos, grandes parques, montanhas, etc. Para problemas com barreiras, a métrica para medir as distâncias é mais elaborada (Okabe *et al.*, 2000; da Silva, 2004). Se um obstáculo ou barreira está colocado na linha reta entre uma origem e um destino, torna-se necessário realizar um desvio em torno do obstáculo. A métrica adotada, neste caso, é a da *distância visível mais curta* (Okabe *et al.*, 2000; da Silva, 2004).

### 3. ASPECTOS COMPUTACIONAIS

A pesquisa científica em geometria computacional vem atraindo grande interesse nos últimos anos (Preparata e Shamos, 1975; Hoff III *et al.*, 2000), cobrindo diversas áreas de informática, como, por exemplo, jogos computacionais, projeto assistido por computador, robótica, reconhecimento de padrões, etc. Em particular, também cresceu muito o interesse por diagramas de Voronoi (Aurenhammer, 1991, Hoff III *et al.*, 2000). Os enfoques atualmente utilizados para a construção de diagramas de Voronoi são métodos combinatórios, técnicas incrementais, métodos de divisão e conquista (*divide-and-conquer*), e métodos aproximados, destacando-se a técnica *plane-sweep* (Fortune, 1987; Aurenhammer, 1991) e a técnica *quad-tree* (Samet, 1988).

A técnica *plane-sweep* foi desenvolvida por Fortune (1987) e se destaca pela sua concepção e simplicidade computacional. Uma interessante demonstração prática desse método pode ser encontrado em < [www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/](http://www.diku.dk/hjemmesider/studerende/duff/Fortune/) >. O método *plane-sweep* é bastante eficaz para a construção de diagramas de Voronói do tipo ordinário e com pesos aditivos, mas não resolve problemas com pesos multiplicativos e problemas com barreiras. Por essa razão utilizamos na nossa pesquisa a técnica *quad-tree* (Samet, 1988), que se aplica igualmente a todos os tipos de diagramas de Voronoi de interesse.

A técnica *quad-tree* (Samet, 1988) é um processo computacional para representação de imagens baseado na sucessiva sub-divisão da figura em quadrantes, seguindo uma estrutura hierárquica de dados. Suponha, por exemplo, que se deseja definir graficamente um bissetor de um diagrama de Voronoi qualquer, bissetor esse que separa dois distritos adjacentes  $i$  e  $j$  (Figura 2a).

Aqui os quadrantes são quadrados, mas podem também ser retângulos. Em cada estágio do processo (representado pelos diversos níveis na Figura 2b), cada vértice do quadrante é examinado, determinando-se qual o ponto gerador do diagrama de Voronoi mais próximo a ele. Podem ocorrer duas situações: (a) os quatro vértices do quadrante têm um mesmo ponto gerador como elemento mais próximo; (b) pelo menos um dos vértices é associado a um ponto gerador diferente dos demais. Uma função simples  $F_Q$  é definida: (a)  $F_Q = i$ , se os quatro vértices do quadrante  $Q$  estão relacionados com o mesmo ponto gerador  $i$ ; (b)  $F_Q = 0$ , se uma parte dos vértices do quadrante  $Q$  está relacionada com um ponto gerador  $i$ , e os outros vértices estão relacionados com pontos geradores diferentes de  $i$ .

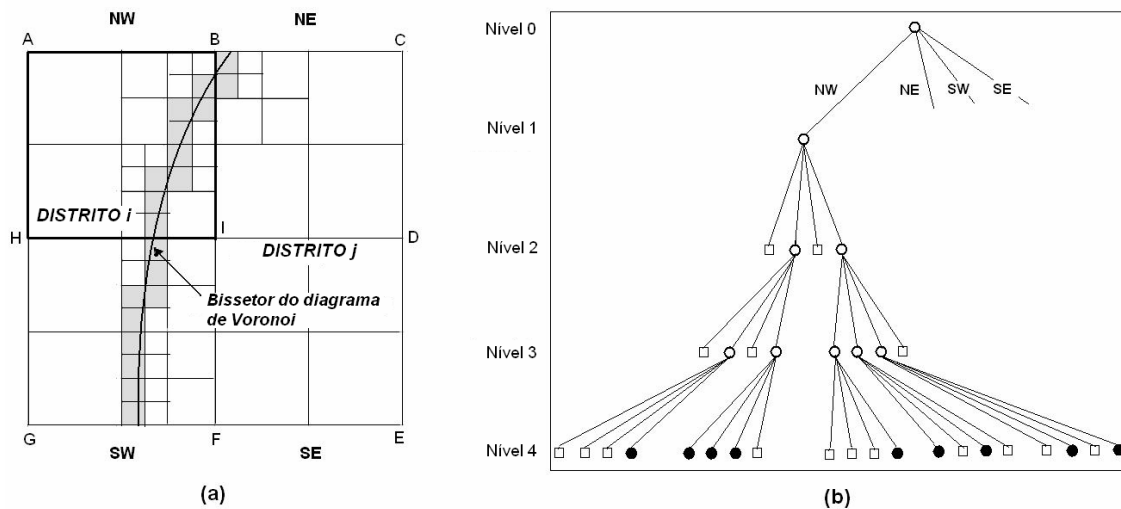
À medida que se avança nos níveis, forma-se uma árvore de grau 4, em que a raiz (um quadrante) se abre em quatro elementos iguais representados simbolicamente pelos quadrantes NW, NE, SW, e SE, obtidos pela sub-divisão da raiz (Samet, 1988). É o que mostra a Figura 2. Os dados de cada quadrante são colocados num arquivo contendo seis registros. Os primeiros cinco registros contêm a identificação da raiz (quadrante pai) e dos quatro quadrantes gerados a partir dela (quadrantes filhos). O sexto elemento registra o valor da função  $F_Q$ . Por exemplo, na obtenção do bissetor separando as sub-regiões  $i$  e  $j$  da Figura 2a, inicia-se com a imagem plena inicial formada pelo quadrado *ACEGA*. Para o quadrante *NW* (*ABIH* na Figura 2a) tem-se  $F_Q = 0$ , pois os vertices  $A$ ,  $B$ , and  $H$  estão próximos do ponto gerador  $i$ , enquanto o vértice  $I$  está próximo do ponto gerador  $j$ . Os quadrantes NE e SW têm também  $F_Q = 0$ , mas, para o quadrante SE, tem-se  $F_Q = j$ , já que seus quatro vértices estão próximos do mesmo ponto gerador  $j$ .

As seguintes regras são estabelecidas para o processo *quadtree*:

- (a) O processo de sub-divisão termina quando se encontra um sub-quadrante tal que  $F_Q = k$  ( $k \neq 0$ ). Por exemplo, o quadrante SE (quadrado *DEFI*) na Figura 2a.
- (b) O processo de sub-divisão prossegue enquanto  $F_Q = 0$ . Neste caso os valores de  $F_Q$  são determinados para os quatro sub-quadrantes gerados a partir dele e registrados.

- (c) Quando a sequência atinge um determinado nível de precisão pré-estabelecido, o processo *quadtree* termina.

A Figura 2b mostra a sequência de codificação do processo *quadtree* relacionado com o quadrante noroeste *ABIHA* da Figura 3a. Os nós circulares em branco representam os quadrantes do tipo  $F_Q = 0$ . Os nós circulares pretos indicam as células finais (dentro do nível de precisão desejado) que vão constituir a curva bissetora procurada. No exemplo da Figura 2, apenas quatro níveis foram examinados e, obviamente, o bissetor resultante é bastante impreciso, exigindo maior detalhamento. Os nós quadrados, por sua vez, representam quadrantes terminais do tipo  $F_Q = k$ , com  $k \neq 0$ .



**Figure 2** - A técnica *quad-tree* aplicada à construção de um diagrama de Voronoi.

A técnica *quad-tree* leva a uma redução substancial do tempo de computação na construção de diagramas de Voronoi não ordinários. De fato, os pontos que formam as curvas bissetoras dos diagramas de Voronoi são esparsos sobre a região plana de interesse e uma grande parte dos quadrantes serão do tipo  $F_Q = k$  ( $k \neq 0$ ), nos vários níveis do processo. Essa situação geral leva a uma substancial redução no processo de sub-divisão dos quadrantes. Em segundo lugar, quando a construção do diagrama de Voronoi é completada, torna-se necessário determinar os valores de diversas funções e de integrais para cada um dos distritos, e os quadrantes resultantes, de tamanhos diversos, facilitam em muito essa tarefa. A técnica *quad-tree* foi utilizada para construir os diagramas de Voronoi associados à aplicação descrita na Seção 4.

#### 4. APLICAÇÃO AOS TRANSPORTES

Será apresentado nesta seção um exemplo de aplicação de diagrama de Voronoi associado a um modelo de localização-alocação na área de transporte urbano de pessoas. Outros problemas de transportes e de logística podem também ser tratados com a mesma metodologia (da Silva, 2004; Galvão *et al.*, 2006; Novaes *et al.*, 2007).

##### 4.1 Descrição do problema

Diagramas de Voronoi são úteis para análise espacial e otimização de localização de diversos problemas de transporte e de logística. Neste artigo é apresentado e discutido um problema de localização de estações ao longo de um trecho de linha de metrô. A localização ótima das estações de metrô e a alocação da demanda às diversas estações são dois aspectos importantes relacionados com projetos desse modo de transporte urbano (Hamacher *et al.*, 2001; Saka, 2001; Laporte *et al.*, 2002, Novaes *et al.*, 2007). Nesta seção é apresentada uma aplicação específica, na qual os usuários se deslocam de suas origens para um terminal localizado no centro da cidade (*CBD*), escolhendo como meio de transporte o metrô, ou uma linha de ônibus alternativa, ou caminhando diretamente ao *CBD*. O problema é determinar o número de estações de metrô e suas localizações ótimas, de forma a maximizar a captação da demanda para esse meio de transporte. Outros objetivos podem ser adotados, como, por exemplo, a minimização do tempo médio de deslocamento total até o terminal do *CBD* (Okabe *et al.*, 2000, Seção 9.2.7), minimização do tamanho da frota de veículos para um determinado nível de demanda (Saka, 2001), etc.

Seja a região urbana hipotética *R* mostrada na Figura 3, que é atualmente servida por uma linha de ônibus convergindo para o terminal *CBD*. Além do terminal *CBD*, existem sete pontos de embarque/desembarque ao longo da linha de ônibus, (numerados 1,...,7), dentro da região *R*. Uma nova linha de metrô está sendo planejada, que se desenvolverá ao longo de uma circunferência de raio  $r = 3.85$  km, como mostrada na Figura 3. A demanda de transporte, no caso, segue uma função de densidade exponencial negativa, circular, com centro no *CBD*. As curvas circulares da Figura 3 indicam os níveis de demanda em termos percentuais, correspondendo 100% ao *CBD*.

Ao acrescentar uma nova estação à linha do metrô, dois efeitos contrários influem na possibilidade de captação adicional da demanda, e na perda de parte da demanda já existente (Hamacher *et al.*, 2001; Laporte *et al.*, 2002). Em primeiro lugar, o tempo de percurso do metrô vai aumentar devido aos tempos adicionais ocasionados pela aceleração e desaceleração da composição, como também pela parada do trem na nova estação. Para alguns usuários, esse tempo adicional pode alterar sua escolha do modo de transporte, levando-os a selecionar o ônibus ou decidir ir a pé até o *CBD*. Em segundo lugar, esse acréscimo no número de pontos de embarque poderá atrair para o metrô novos usuários localizados nas proximidades da nova estação. Assim, dois efeitos contrários ocorrem nesse processo, e o modelo de otimização busca equilibrar tais efeitos, selecionando o número e a localização das estações que maximizem a captação da demanda para o sistema de transporte rápido (Hamacher *et al.*, 2001; Laporte *et al.*, 2002).

#### 4.2 Diagrama de Voronoi correspondente

Sejam  $\gamma_a$  e  $\gamma_d$  a aceleração e a deceleração da composição de metrô e seja  $V_C$  sua velocidade de cruzeiro projetada (Saka, 2001). Durante as fases de aceleração e desaceleração, as distâncias cobertas pelo veículo são, respectivamente,

$$D^{(a)} = \frac{V_C^2}{2 \gamma_a} \quad \text{and} \quad D^{(d)} = \frac{V_C^2}{2 \gamma_d}. \quad (7)$$

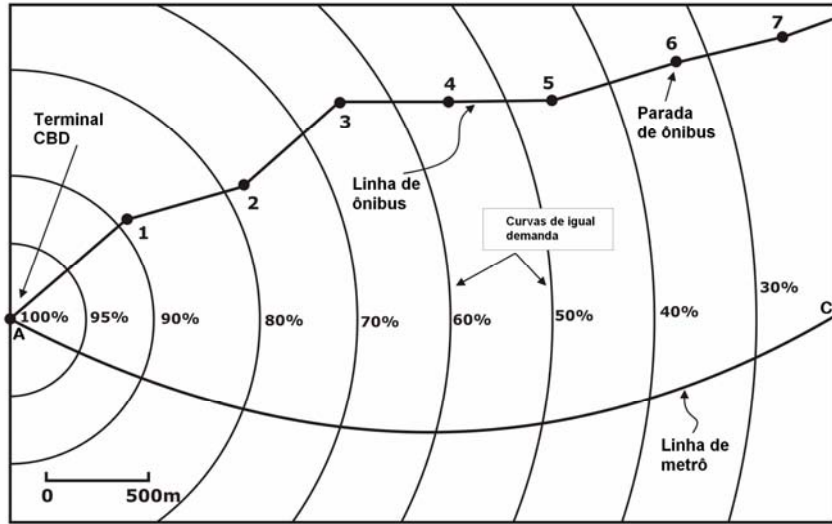
Se  $D_{i, i+1}$  é a distância na linha férrea entre as duas estações adjacentes  $i$  e  $i+1$ , a velocidade do metrô nesse trecho é dada por

$$\bar{V}_{i,i+1}^{(s)} = \left[ (D^{(a)} + D^{(d)}) \frac{V_C}{2} + (D_{i,i+1} - D^{(a)} - D^{(d)}) V_C \right] / D_{i,i+1}, \quad (8)$$

se  $D^{(a)} + D^{(d)} \leq D_{i,i+1}$  e por

$$\bar{V}_{i,i+1}^{(s)} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 \gamma_a \gamma_d D_{i,i+1}}{\gamma_a + \gamma_d}}, \quad (9)$$

em caso contrário (Saka, 2001).



**Figura 3** – Uma região urbana servida por uma linha de ônibus e uma nova linha de metrô

Para cada configuração, representada pelo número de estações e as respectivas localizações, a velocidade média em cada link é computada de acordo com (8) ou (9). Assim, o tempo de percurso da composição, desde a estação  $i$  até o CBD, é dado por

$$tv_i^{(s)} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{D_{j,j+1}}{V_{j,j+1}^{(s)}} + \sum_{j=1}^i \bar{ST}^{(s)}, \quad (10)$$

onde  $\bar{ST}^{(s)}$  é o tempo médio de parada numa estação. No caso da linha de ônibus, uma vez que o número e as localizações dos pontos de parada são admitidos fixos no problema, e uma vez que o movimento dos veículos é afetado pelas interferências com o fluxo externo, admitiu-se uma velocidade média constante  $\bar{V}^{(b)}$ . Assim o tempo médio de percurso do ônibus desde o ponto de parada  $i$  até o CBD é dado por

$$tv_i^{(b)} = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{D_{j,j+1}}{\bar{V}^{(b)}} + \sum_{j=1}^i \bar{ST}^{(b)}, \quad (11)$$

onde  $\bar{ST}^{(b)}$  é o tempo médio de parada do ônibus num ponto qualquer. Por outro lado, o tempo de percurso a pé do usuário, desde seu ponto de origem  $X$  até um ponto de ônibus ou uma estação de metrô, representados genericamente por  $P_i$ , é dado por

$$t_H^{(i)} = \frac{k}{V_H} \|X - P_i\|, \quad (12)$$



onde  $V_H$  é a velocidade média de uma pessoa ao caminhar, sendo  $k$  um coeficiente corretivo (*route factor*) que reflete a impendância da rede viária em relação à métrica Euclidiana (Galvão *et al.*, 2006; Laporte *et al.*, 2002). O tempo médio de espera  $t_w^{(L)}$  num ponto de embarque qualquer é admitido como igual à metade do *headway*  $\tau_L$  observado na rota  $L$  que contenha  $i$  ( $L = s$  para metrô, e  $L = b$  para ônibus).

O tempo total gasto por uma pessoa se deslocando do ponto  $X$  até o *CBD*, através do ponto de embarque genérico  $i$  (metrô ou ônibus), é dado pela soma desses três elementos

$$T_i = tv_i^{(L)} + t_H^{(i)} + t_w^{(L)} \quad (i = 1, \dots, m). \quad (13)$$

Assim, para cada origem  $X$ , o modelo busca o ponto de embarque  $i$  (seja ônibus, metrô, ou caminhando diretamente a pé até o *CBD*) que apresente o menor valor de  $T^{(i)}$ . Fazendo as necessárias substituições em (13),  $T_i$  pode ser expresso da seguinte forma

$$T_i = c \left\| \mathbf{X} - \mathbf{P}_i \right\| + w_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (14)$$

onde  $c$  é uma constante. Dividindo ambos os termos de (14) por  $c$ , o processo de zoneamento resultante, em cada estágio do modelo de localização/alocação, pode ser representado por um diagrama de Voronoi com pesos aditivos (Seção 2), associado aos pontos geradores  $P \equiv \{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m\}$ , que são, no caso, os pontos de transferência (ônibus, metrô e o *CBD*).

### 4.3 Modelo de localização/alocação

O objetivo do modelo de localização/alocação é maximizar o total de passageiros que potencialmente pode ser transportado pelo metrô, atuando em duas variáveis de decisão: (a) número de estações de metrô; (b) localização das estações ao longo da linha. Uma vez que o traçado em planta do metrô já está definido neste exemplo, os locais possíveis para localização das estações estão sobre um arco de circunferência. Esses pontos podem então ser representados por uma variável  $\theta$  (um ângulo) de forma que cada ponto ao longo da linha corresponda a um valor de  $\theta$  dentro do intervalo  $(\theta_{min}, \theta_{max})$ . Seja  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)$  o vetor que representa as localizações das estações, sendo  $s$  o número de estações. Seja  $\phi(\mathbf{X})$ , por outro lado, a função que representa a densidade da demanda no ponto  $X$ . A função objetivo a ser maximizada é a seguinte

$$G(\Theta_s) = \sum_{i=b+1}^{b+s} \int_{V_i} \phi(\mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (15)$$

onde  $i$  representa as estações de metrô ( $i = 1, 2, \dots, s$ ), sendo  $V_i$  o diagrama de Voronoi correspondente à estação  $i$ . A avaliação numérica de  $G(\Theta_s)$  envolve a construção do diagrama de Voronoi, com pesos aditivos, correspondente a cada ponto de embarque (ônibus, metrô, a pé). Essa construção foi feita, neste caso, com a técnica *quad-tree* (Seção 3). Foi utilizado, para maximizar (15), o método de Hooke e Jeeves (1962). No modelo foi imposta apenas uma restrição, obrigando a distância média entre estações de metrô não ser inferior a uma determinada extensão, no caso em questão 800m.

### 4.4 Aplicação do modelo

Para a aplicação do modelo foram adotados os seguintes valores para as variáveis do problema:  $k = 1.35$ ,  $V_H = 4.4$  km/h,  $\bar{V}^{(b)} = 20$  km/h na linha de ônibus,  $V_C = 60$  km/h para o metrô, tempo médio de parade igual a 90 seg para ônibus e 30 seg para metrô, *headway* de 5

min para ônibus e 1,5 min para o trem. Por outro lado, as pessoas não estão dispostas a andar longas distâncias para usar o transporte público, preferindo, nesse caso, ir direto a pé ao *CBD*, utilizar o automóvel ou tomar um táxi. Com base em Sullivan e Morral (1996), admitimos um tempo máximo de percurso a pé de 20 min até a estação do metrô, e de 15 min até o ponto de ônibus. O modelo de otimização, combinado com o sub-programa para construir o diagrama de Voronoi com pesos aditivos, foi aplicado variando o número de estações do metrô de 1 a 7. Os resultados são mostrados na Tabela 1, onde aparecem o número de iterações necessárias para se chegar à solução ótima, a distância média entre estações e o nível de demanda atraída pelo metrô, expressa em porcentagem sobre a demanda total.

Observa-se que, para 5 estações, se alcança o máximo nível de atração da demanda para o metrô. Mas, como a distância média mínima entre estações foi limitada a 800m nesta aplicação, a solução final, que atende à restrição, possui quatro estações, conforme indicado na Tabela 1. Na Figura 4 são mostradas as localizações ótimas das estações de metrô para a solução de quatro instalações, juntamente com as áreas de influência de cada ponto de embarque, mais o *CBD*. Essas áreas de influência são o resultado da aplicação do diagrama de Voronoi com pesos aditivos.

**Table 1** - Resultados da otimização em função do número de estações do metrô

Número de estações do metro ( <i>s</i> )	Número de iterações $\xi$	Distância média entre estações (m)	Demanda atraída pelo metrô (%)
1	29	2,103	25.38
2	65	1,402	44.04
3	205	1,051	50.71
4	227	841	52.19
5	359	701	52.62 (*)
6	441	601	52.32
7	443	526	51.61

(\*) Captação máxima da demanda pelo metrô devida aos efeitos contrários na atração dos usuários.

## 6. Conclusões

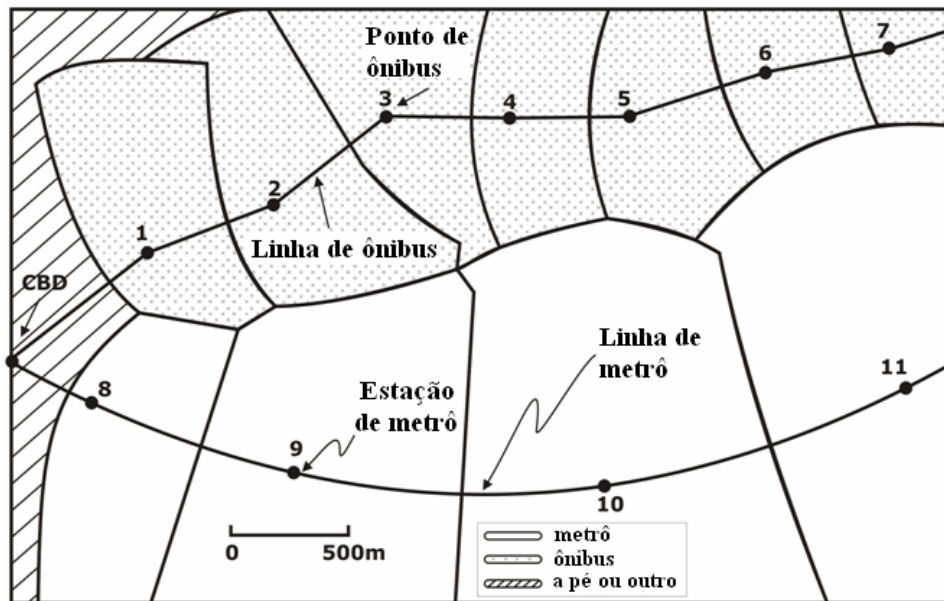
Desenvolvimentos recentes em geometria computacional abriram caminho para se trabalhar com diagramas de Voronoi de maior escala e mais complexos, o que possibilitou resolver importantes problemas de transportes e de logística. A utilização de diagramas de Voronoi não ordinários, como o de pesos multiplicativos, aditivos ou combinados, bem como os diagramas de Voronoi com obstáculos, associados a modelos de otimização do tipo localização-alocação, permitem resolver problemas práticos nas fases de planejamento de sistemas de transporte, conforme demonstrado no presente trabalho. Da mesma forma, problemas espaciais de logística podem ser resolvidos de forma semelhante.

De fato, diagramas de Voronoi podem ser utilizados na solução de problemas logísticos relacionados com a determinação de zonas de serviços a serem alocadas a pessoas ou veículos (Boots e South, 1997; Galvão *et al.*, 2006; da Silva, 2004; Novaes *et al.*, 2007). A utilização de diagramas de Voronoi na solução de problemas logísticos leva geralmente a fatores de carga mais equilibrados entre os distritos. Isso ocorre porque os diagramas de Voronoi associados a esses problemas apresentam grau de liberdade maior do que as formas de zoneamento resultantes dos métodos tradicionais. Por outro lado, o potencial das possíveis

aplicações de diagramas de Voronoi é bastante grande e merece ser explorado extensiva e intensivamente.

#### Agradecimento

Esta pesquisa foi apoiada financeiramente pelo CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, projeto nº 300886/2005-5.



**Figure 4** – Resultado da aplicação do modelo de localização-alocação com o auxílio de diagrama de Voronoi

#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aurenhammer, F. (1991) Voronoi Diagrams – a Survey of a Fundamental Geometric Data Structure. *ACM Computing Surveys*, v. 23, n. 3, p. 345-405.
- Boots B.e R. South (1997) Modeling Retail Trade Areas Using Higher-order, Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams. *Journal of Retailing*, v. 73, n. 4, p.519-536.
- D’Amico S.J., S.J.Wang, R. Batta e C.M. Rump (2002) A Simulated Annealing Approach to Police District Design. *Computers & Operations Research*, v. 29, n.6, p. 667-684.
- Dasci A. e V. Verter (2001) A Continuous Model for Production-Distribution System Design. *European Journal of Operational Research*, v. 129, p. 287-298.
- da Silva, A.C.L. (2004) *Estratégia para Divisão da Áreas de Estudo em Problemas Logísticos – Uso de Diagrama de Voronoi com Obstáculos*, Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Drezner, Z. (ed.) (1995) *Facility Location: A Survey of Application and Methods*. Springer, Berlin.
- Drezner, Z. e H. Hamacher (eds.) (2002) *Facility Location: Applications and Theory*. Springer, Berlin.
- Fortune, S. (1987) A Sweep-line Algorithm for Voronoi Diagrams. *Algorithmica*, v. 2, p. 153-174.
- Galvão, L.C.; Novaes, A.G.; de Cursi, J.E.S. e J.C. Souza (2006) A Multiplicatively-weighted Voronoi Diagram Approach to Logistics Districting. *Computers & Operations Research*, v.33, p. 93-114.
- Hamacher, H.W., Liebers, A., Schöbel, A., Wagner D. e F. Wagner (2001) Locating New Stops in a Railway Network. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, v. 50, n.1, 11 pgs.

- Hoff III, K.; Culver, T.; Keyser, J.; Lin, M.C. e D. Manocha (2000) Interactive Motion Planning Using Hardware-accelerated Computation of Generalized Voronoi Diagrams. *Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA*, p. 2931-2937.
- Hojati M. (1996) Optimal Political Districting. *Computers & Operations Research*, v. 23, n. 12, p.1147-1161.
- Hooke, R. e T.A. Jeeves (1962) Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, v. 8, p.212-229.
- Langevin A.; Mbaraga P. e J.F. Campbell (1996) Continuous Approximation Models in Freight Distribution: an Overview. *Transportation Research – B*, v. 30, n. 3, p. 163-188.
- Laporte, G.; Mesa, J.A. e F.A. Ortega (2002) Locating Stations on Rapid Transit Lines. *Computers & Operations Research*, v. 29, p. 741-759.
- Mehrotra A.; Johnson E.L. e G.L. Nemhauser (1998) An Optimization Based Heuristic for Political Districting, *Management Science*, v. 44, n. 8, p.1100-1114.
- Muyldermans L.; Cattrysse D.; Van Oudheusden D. e T. Lotan (2002) Districting for Salt Spreading Operations, *European Journal of Operational Research*, v. 139, n. 3, p.521-532.
- Novaes A.G.; Souza de Cursi J.E. e O.D. Graciolli (2000) A Continuous Approach to the Design of Physical Distribution Systems, *Computers & Operations Research*, v. 27, n. 9, p. 877-893.
- Novaes, A.G.; Souza de Cursi, J.E., da Silva, A.L. e J.C. Souza (2007) Solving Continuous Location-districting Problems with Voronoi Diagrams, *Computers & Operations Research* (artigo aceito para publicação)
- Okabe, A. e A. Suzuki (1997) Locational Optimization Problems Solved Through Voronoi Diagrams, *European Journal of Operational Research*, v. 98, p.445-456.
- Okabe A.; Boots B. e K. Sugihara (2000) *Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams* (second edition). Wiley, Chichester.
- Preparata, F.P. e M.I. Shamos (1985) *Computational geometry – An introduction*. Springer, New York.
- Saka, A.A. (2001) Model for Determining Optimum Bus-stop Spacing in Urban Areas, *Journal of Transportation Engineering*, Maio-Junho 2001, p.195-199.
- Samet, H. (1988) Hierarchical Data Structures and Algorithms for Computer Graphics, *IEEE Computer Graphics & Applications*, May 1988, p 48-68.
- Schoepfle O.B. e R.L.Church (1991) A New Network Representation of a “Classic” School Districting Problem, *Socio-Economic Planning Science*, v. 25, n. 3, p. 189-197.
- Sullivan, S. e J. Morrall (1996) Walking Distances to and from Light-rail Transit Stations, *Transportation Research Record 1538*, Transportation Research Board, Washington, DC.
- Suzuki, A. e A. Okabe (1995) Using Voronoi Diagrams. In: Drezner Z.(ed.). *Facility Location: a Survey of Applications and Methods*, p. 103-118, Springer, New York.
- Williams Jr, J.C. (1995) Political Redistricting: a Review, *Papers in Regional Science*, v. 74, p.13-40.
- Zoltners, A.A. e P. Sinha (1983) Sales Territory Alignment: a Review and Model, *Management Science*, v. 29, n. 11, p.1237-1256.
- Zhou G.; Min H. e M. Gen (2002) The Balanced Allocation of Customers to Multiple Distribution Centers in the Supply Chain Network: a Genetic Algorithm Approach, *Computers & Industrial Engineering*, v. 43, p. 251-261.

Endereço do autor:

Antonio Galvão Novaes  
 Departamento de Engenharia de Produção e Sistemas  
 Universidade Federal de Santa Catarina  
 Campus Universitário – Trindade  
 Florianópolis, SC  
 88040-900  
 Tel: (48) 3721 7009